Μιγαδικές Συναρτήσεις. Ι

Όρια και συνέχεια συναρτήσεων:

Ορισμός: Μιγαδική συνάρτηση $= f: D \to \mathbb{C},\ D \subset \mathbb{C}$.

Παρατήρηση: α) $(f+g)(z) = f(z)+g(z)$

$$(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{f(z)}{g(z)},\ g(z) \neq 0.$$

$$f(g(z)) = (f \circ g)(z).$$

Δηλαδή οι αντίστοιχα πράξεις και σύνθεση συναρτήσεων ορίζονται κατά σημείο.

β) Συναρτήσεις $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{C}$, ονομάζονται πραγματικές συναρτήσεις μιγαδικών μεταβλητών. Είναι ειδικές περιπτώσεις μιγαδικών συναρτήσεων (αφού $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)

Παραδείγματα: (i) Έστω $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, τότε

$$f(z) = \underbrace{Re(f(z))}_{=(Re(f))(z)} + i\,\underbrace{Im(f(z))}_{=(Im(f))(z)}$$

(ii) $Re(f): D \to \mathbb{R}$, $Im f: D \to \mathbb{R}$ είναι πραγματικές συναρτήσεις μιγ. μεταβλητών (συνάρτηση του πραγματικού και του φαντ. μέρους της f, αντίστοιχα)

Επίσης αφού για $f(z) \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

έχουμε $f(z) = |f(z)|\, e^{i \underbrace{Arg(f(z))}_{=(Arg f)(z)}}$

και άρα οι συναρτήσεις $|f|: D \to [0,\infty) \subset \mathbb{R}$, $Arg f: D \to (-\pi,\pi] \subset \mathbb{R}$ ονομάζονται συναρτήσεις της απόλυτης τιμής της f και του κύριου ορίσματος της f.

(iii) Άρα και πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, μπορούν να θεωρηθούν ως μιγαδικές συναρτήσεις μιγαδικής μεταβλητής αφού $D \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ και $f(D) \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

❗ Σημαντικός στόχος της Μ.Α. είναι η καλύτερη κατανόηση/μελέτη ιδιοτήτων πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής, μέσω της επέκτασής τους σε μια περιοχή του $\mathbb{C}$, κατά «φυσιολογικό τρόπο».
Δηλαδή αν έχουμε μια $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, θέλουμε να επεκτείνουμε αυτή την f σε μια $\tilde{f}: \tilde{D} \to \mathbb{C}$ όπου το $\tilde{D} \subset \mathbb{C}$ και $\underbrace{\tilde{f}|_D}_{\text{ο περιορισμός της } \tilde{f} \text{ στο } D} = f$.

Έτσι ώστε η επέκταση $\tilde{f}$ να διατηρεί την ισχύ (να επεκτείνει δηλαδή) κάποιες ιδιότητες της f στην $\tilde{f}$ (π.χ: συνεχής επέκταση, αναλυτική επέκτ. κτλ)

SOS!!! (iv) Αφού κάθε $z \in D \subset \mathbb{C}$, αντιστοιχεί μοναδικά σε ένα $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ $[z = x+iy = (x,y)]$ και οι τιμές $f(z) \in \mathbb{C}$ μιας $f: D \to \mathbb{C}$ αντιστοιχούν μοναδικά στο

$$f(z) = \underbrace{\mathrm{Re} f(z)}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{\mathrm{Im} f(z)}_{\in \mathbb{R}}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{αντιστοίχιση} \\ \text{"1-1" και επί}}}{=} (\mathrm{Re}(f(z)), \mathrm{Im}(f(z))) \in \mathbb{R}^2.$$

Προκύπτει: ότι η f αντιστοιχεί μοναδικά σε ένα διανυσματικό πεδίο στο $D \subset \mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x,y) \longrightarrow \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathrm{Re} f(x+iy) \\ \mathrm{Im} f(x+iy) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

$\updownarrow$ "1-1" και επί

(*) $D \ni z \mapsto f(z) = f(x+iy) = \mathrm{Re} f(x+iy) + i \, \mathrm{Im} f(x+iy)$

(*) Συχνά γράφουμε $\boxed{f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)}$

Παραδείγματα μιγαδικών συναρτήσεων:

▸ $\exp: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\exp z = e^z$.

$(\exp|_{\mathbb{R}}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\exp(x)=e^x$. ο περιορισμός της exp στο $\mathbb{R}$.)

$$\exp(x+i0)=e^{x+i0}=e^x e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e^x$$

▸ $\log: \mathbb{C}\setminus\{0\}\longmapsto \mathbb{C}$ (με $\log|_{(0,\infty)} = \ln: (0,\infty)\to\mathbb{R}$)

$$\log(x+iy)=\ln|x|+i\,\mathrm{Arg}(x+iy)$$

$\Rightarrow$ Για $x>0$: $\log(x+i0)=\underbrace{\ln|x|}_{=x}+i\underbrace{\mathrm{Arg}(x+i0)}_{=0}$

▸ $\mathrm{Re}: \mathbb{C}\to\mathbb{R}: z\to \mathrm{Re}(z)$

$\mathrm{Im}: \mathbb{C}\to\mathbb{R}: z\to \mathrm{Im}(z)$

$|\cdot|: \mathbb{C}\to\mathbb{R}: z\to|z|$,

η οποία είναι επέκταση της $|\cdot|: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

$(x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x+i0\in\mathbb{C} \Rightarrow \underbrace{|x+i0|}_{\in\mathbb{C}}=\sqrt{x^2+0^2}=\underbrace{|x|}_{\in\mathbb{R}}$.

Όριο και συνέχεια μιγαδικών συναρτήσεων:

Ορισμός: Έστω $D\subset\mathbb{C}$, $f: D\to\mathbb{C}$, $\alpha\in\mathbb{C}$ σ.σ. του D και $b\in\mathbb{C}$. Τότε λέμε ότι η f συγκλίνει στο b, όταν το z τείνει στο α. (Συμβολικά $f(z)\to b$, για $z\to\alpha$)

αν $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall z\in D)$, $0<|z-\alpha|<\delta$: $|f(z)-b|<\varepsilon$.

$\Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall z\in D\cap D(\alpha,\delta)\setminus\{\alpha\}: f(z)\in D(b,\varepsilon)$

$(D(\alpha,\delta)=\{w\in\mathbb{C}: |\alpha-w|<\delta\})$

ανοιχτός δίσκος κέντρου α ακτίνας δ.

Πρόταση: Αν η f συγκλίνει για $z \to a$, τότε έχει μοναδικό όριο b και γράφεται: $\lim_{z\to a} f(z)=b$

SOS!!!

Πρόταση: Έστω $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, a: σ.σ. του D. Τότε

$$\lim_{z\to a} f(z)=b \iff \lim_{z\to a}(f(z)-b)=0$$

$$\iff \lim_{z\to a}|f(z)-b|=0 \iff \lim_{w\to 0} f(w+a)=b$$

$$\overset{(*)}{\iff} \lim_{z\to a} Re(f(z)) = Re(b) \wedge \lim_{z\to a} Im(f(z)) = Im(b)$$

$$\iff \forall (z_n)\subset D\setminus\{a\},\ z_n \to a : f(z_n)\to b$$

"Εκτός από το (*) όλα τα άλλα αποδεικνύονται άμεσα με χρήση του ορισμού και η ισοδυναμία ακολουθ. με ε-δ ορισμού, όπως στο $\mathbb{R}^2$ η στην τοπολ. του Μ.Χ."

Για το (*): <u>Απόδ.</u>

Δουλεύουμε με την "1-1" και επί αντιστοίχιση

$D \subset \mathbb{C}$, $f: D \to \mathbb{C}$, $z = x+iy \to f(z) = \underbrace{Re f(x+iy)}_{=u(x,y)} \pm \underbrace{Im f(x+iy)}_{=v(x,y)}$

με $D \subset \mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re\, f(x+iy) \\ Im\, f(x+iy) \end{pmatrix}$

SOS!!!

Πρόταση: $f, g : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, a σ.σ του D.

Τότε: i) $\lim_{z \to a} f(z) = b \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \lim_{z \to a} |f(z)| = |b|$.

ii) $\lim_{z \to a} f(z) = b$, $\lim_{z \to a} g(z) = c \Rightarrow$

$\lim_{z \to a} (f+g)(z) = b + c$

$\lim_{z \to a} (fg)(z) = b \cdot c$.

$\lim_{z \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{b}{c}$.

Παραδείγματα: 1) $\lim_{z \to a} z = a$, $\lim_{z \to a} Re(z) = Re(a)$.

$\lim_{z \to a} Im(z) = Im(a)$, $\lim_{z \to a} (\bar{z}) = \bar{a}$.

$\lim_{z \to a} |z| = |a|$

SOS!!

Σχόλιο: Από την $\mathbb{R}$-γραμμικότητα της συνάρτησης του πραγματικού μέρους $Re: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$.

Δηλαδή $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $z, w \in \mathbb{C}$

$$Re(\lambda z + \mu w) = Re(\underbrace{\lambda Re(z) + \mu Re(w)}_{\in \mathbb{R}} + i\overbrace{(\lambda Im z + \mu Im w)}^{\in \mathbb{R}})$$

$= \lambda Re(z) + \mu Re(w)$.

Έτσι προκύπτει: $|Re(z) - Re(a)| = |Re(z-a)| \leq |z-a|$

$\Rightarrow \lim_{z \to a} Re(z) = Re(a)$

(ανάλογα και τα υπόλοιπα)

9) Άλγεβρα ορίων και παράδ. 1.

$\Rightarrow \lim_{z\to a} z^n = a^n$, για $a\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$

$\lim_{z\to a} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{a^n}$, $a\in\mathbb{C}^*$.

$\forall a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}=\mathbb{C}^*$, $n,m\in\mathbb{N}$: $\lim_{z\to a} \frac{z^n-a^n}{z^m-a^m} = \frac{n}{m} a^{n-m}$.

$$z^n - a^n = (z-a)\sum_{k=0}^{n-1} z^k\cdot a^{n-1-k}.$$

$\uparrow$

$$\text{δεξιά} = \sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} a^{n-(k+1)} - \sum_{k=0}^{n-1} z^k\cdot a^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} z^k a^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} z^k a^{n-k}.$$

π.χ.

Με την (*) έχουμε από την άλγεβρα ορίων:

$$\frac{z^n-a^n}{z^m-a^m} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} z^k a^{n-(k+1)}}{\sum_{j=0}^{m-1} z^j a^{m-(j+1)}} \xrightarrow[z\to a]{} \underbrace{\frac{n\cdot a^{n-1}}{m\cdot a^{m-1}}}_{=\frac{n}{m}a^{n-m}}$$

SOS

Το όριο $\lim_{z\to 0}\frac{\bar z}{z}$ $\nexists$, αφού $\frac{\bar z}{z} = \frac{\bar z^2}{|z|^2} = \frac{(x-iy)^2}{x^2+y^2} =$

$= \frac{x^2-y^2+i\,2xy}{x^2+y^2}$ και το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $\nexists$

και $\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{2xy}{x^2+y^2}$ $\nexists$.

Ορισμός: Έστω $D \subset \mathbb{C}$ και $f: D \to \mathbb{C}$

α) Αν $a \in \mathbb{C}$ σ.σ. του D, τότε λέμε ότι η f τείνει στο ∞, όταν το z τείνει στο a.

$(\forall r>0)(\exists \delta>0)(\forall z \in D) : 0<|z-a|<\delta : |f(z)|>r.$

Συμβολισμός: $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty.$

β) Αν το D είναι μη φραγμένο, τότε λέμε ότι η f συγκλίνει στο $b \in \mathbb{C}$, όταν το z τείνει στο ∞.

αν $(\forall \varepsilon>0)(\exists r>0)(\forall z \in D) : |z|>r : |f(z)-b|<\varepsilon.$

Συμβολισμός: $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = b$

γ) Αν το D είναι μη φραγμένο, τότε λέμε ότι η f τείνει στο ∞, όταν το z τείνει στο ∞.

$(\forall r>0)(\exists \rho>0)\underbrace{(\forall z \in D) : |z|>\rho}_{\iff \forall z \in D \cap D(\infty,\rho)} : |f(z)|>r$

$\iff \forall z \in D \cap D(\infty,\rho)$, όπου $D(\infty,\rho) = \{z \in \mathbb{C} : |z|>\rho\}$

«Το $D(\infty,\rho)$ μπορούμε να το δούμε σαν τον ανοιχτό κυκλικό δίσκο κέντρου ∞ ακτίνας ρ (χωρίς το ∞)»

Πρόταση: $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty \iff \forall (z_n) \subset D \setminus \{a\},\ z_n \to a : f(z_n) \to \infty$

$\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = b \iff \forall (z_n) \subset D,\ z_n \to \infty : f(z_n) \to b$

$\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty \iff \forall$ ——— " ——— $f(z_n) \to \infty$

Απόδ.

Λύση (βλ. σημ.): Α37 - Α40

Συνέχεια Συνάρτησης:

Ορισμός: Η $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, ονομάζεται

α) συνεχής στο $a \in D$, αν $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in D): |z - a| < \delta:$ $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$.

β) συνεχής στο $E \subset D$, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο $z \in E$ ($\neq f|_E$: συνεχής)

γ) συνεχής, αν είναι συνεχής στο $D \Leftrightarrow$ αν είναι συνεχής σε κάθε $a \in D$

Πρόταση: i) Η f συνάρτηση (συνεχής) στο $a \Leftrightarrow$
$(\forall z_n) \subset D: z_n \to a: f(z_n) \to f(a)$

ii) a: σ.σ. στο D: f συνεχής στο $a \in D \Leftrightarrow \lim\limits_{z \to a} f(z) = f(a)$

iii) f συνεχής στο $E \subset D \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f|_E$: συνεχής

π.χ.

$$f(z) = \begin{cases} 1, & z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ 0, & z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow f|_{\mathbb{R}}: \text{συνεχής, αλλά } f: D \to \mathbb{C}$$

όχι συνεχής στο $\mathbb{C}$

αλλά όχι συνεχής στο $x (\in \mathbb{R})$

iv) $f, g: D \to \mathbb{C}$, συνεχείς στο $a \Rightarrow f+g, fg, \frac{f}{g}$ συν. στο a.

v) f συνεχής $\Leftrightarrow$ ($\forall E \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό $f^{-1}(E) \subset D$ ανοιχτό)

vi) D συμπαγές, $D \subset \mathbb{C} \xRightarrow{f \text{ συνεχής}} f(D) \subset \mathbb{C}$ συμπαγές
Ειδικότερα $f: D \to \mathbb{R}$ με $D \subset \mathbb{C}$ λαμβ. μέγ. και ελάχ. τιμή.

vii) D συμπ., $D \subset \mathbb{C}$: με $D \subset \mathbb{C}$, f ομ. συνεχής

viii) σύνθεση συνεχών είναι συνεχής.

SOS!!!

ix) $f: D \to \mathbb{C}$ συνεχής στο $a \Leftrightarrow$
$\binom{u}{v}: D \to \mathbb{R}^2$, $\binom{u}{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re} f(x+iy) \\ \mathrm{Im} f(x+iy) \end{pmatrix}$
είναι συνεχής στο $(\mathrm{Re}(a), \mathrm{Im}(a)) \in D$.

Παραδείγματα:

- $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχής: $e^z = e^{\mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)}$
$= e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\mathrm{Im}(z)}$
$= e^{\mathrm{Re}(z)}(\cos(\mathrm{Im} z) + i \sin(\mathrm{Im} z))$

και $\mathrm{Re}, \mathrm{Im}: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς.
(άλγεβρα συνεχών, σύνθεση συνεχών, $\cos, \sin, \exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συν.)
Άρα η $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής επέκταση της $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- **SOS!!!** $\mathrm{Arg}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (-\pi, \pi]$ είναι συνεχής στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$
αλλά ασυνεχής σε κάθε $x \in (-\infty, 0]$

λόγω κλάδου πολύκλαδης συνάρτησης!!